Électrocinétique | Chapitre 3 | Correction TD (E3)

Exercice n°1 • Circuit RLC en dérivation *cours*

1) En régime permanent, la bobine est équivalente à un fil électrique. Elle va donc court-circuiter les deux autres composants : l'intégralité de l'intensité passe par sa branche. On en déduit que i_L est la courbe (1).
La tension aux bornes du condensateur u (qui est la même que celle aux bornes de la résistance) est continue. Or, $u = R\,i_R$, donc i_R est également continue en $t = 0$. Il s'agit donc de la courbe (3).
Finalement, i_C est la courbe (2).

2) Loi des nœuds : $i_0 = i_R + i_C + i_L$.
De plus, on a les relations courant/tension pour chaque dipôle :

$$u = R\,i_R \qquad u = L\,\frac{di_L}{dt} \qquad i_C = C\,\frac{du}{dt}$$

Ainsi :

$$i_0 = \frac{u}{R} + C\,\frac{du}{dt} + i_L \quad \Rightarrow \quad i_0 = \frac{L}{R}\,\frac{di_L}{dt} + LC\,\frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\,\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{i_0}{LC}}$$

3) Sous forme canonique l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{di_L}{dt} + \omega_0^2\,i_L = \omega_0^2\,i_0$$

On en déduit:

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = R\,\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Le régime pseudo-périodique est défini par :

$$Q > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C > \frac{L}{4R^2} = 0,25 \text{ nF}}$$

4) D'après le graphe, on est en régime pseudo-périodique. Ainsi, la solution générale est :

$$i_L(t) = e^{-\lambda t}\Big[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\Big] + i_0$$

Or, les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} i_L(0^+) = 0 = A + i_0 \quad \Rightarrow \quad A = -i_0 \\ \dfrac{di_L}{dt}(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{L} = 0 = -\lambda A + \Omega B \quad \Rightarrow \quad B = -\dfrac{\lambda i_0}{\Omega} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\boxed{i_L(t) = i_0 - i_0\,e^{-\lambda t}\left[\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right]}$$

5) On sait que la valeur de Q est du même ordre de grandeur que le nombre d'oscillations visibles. On voit clairement 8 oscillations (le graphique ne montre pas les suivantes), on en déduit $Q > 8$. Or, on veut montrer que :

$$\Omega \simeq \omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0 \gg \lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \quad \Leftrightarrow \quad Q \gg \frac{1}{2}$$

Ce qui est bien le cas ici !

6) On lit graphiquement : $8T = 5$ ms, donc $T \simeq 0,625$ ms On sait enfin que :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{1}{L}\cdot\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \simeq 100 \text{ nF}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 10}$$

Exercice n°2 • Oscillateurs harmoniques ★☆☆

1) Loi des mailles :

$$E = u_{L_1} + u_{L_2} + u = L_1\,\frac{di}{dt} + L_2\,\frac{di}{dt} + u = L_1 C\,\frac{d^2u}{dt^2} + L_2 C\,\frac{d^2u}{dt^2} + u$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{u}{(L_1+L_2)\,C} = \frac{E}{(L_1+L_2)\,C}$$

Donc :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1+L_2)\,C}}}$$

2) Loi des mailles :

$$E = u_L + u = L\,\frac{di}{dt} + u$$

Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$. Ainsi :

$$E = L\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) + u = L\left(C_1\,\frac{d^2u}{dt^2} + C_2\,\frac{d^2u}{dt^2}\right) + u$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{u}{L\,(C_1 + C_2)} = \frac{E}{L\,(C_1 + C_2)}$$

Donc :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\,(C_1 + C_2)}}}$$

3) Loi des mailles :

$$E = u_{C_1} + u_{C_2} + u$$

Dérivons 2 fois cette expression :

$$0 = \frac{d^2u_{C_1}}{dt^2} + \frac{d^2u_{C_2}}{dt^2} + \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{i}{C_1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{i}{C_2}\right) + \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{u}{LC_1} + \frac{u}{LC_2} + \frac{d^2u}{dt^2}$$

Sous forme canonique :

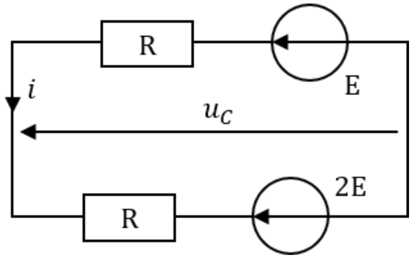
$$\frac{d^2u}{dt^2} + u\left(\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}\right) = 0$$

Donc :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC_1} + \frac{1}{LC_2}}}$$

Exercice n°3 • Conditions initiales d'un OH ★⯪☆

1) Voici le schéma équivalent simplifié en régime stationnaire (interrupteur en position 1).



Loi des mailles :

$$E - Ri - Ri - 2E = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{i(0^-) = -\frac{E}{2R}}$$

On en déduit :

$$u_C = E - Ri \quad\Rightarrow\quad \boxed{u_C(0^-) = \frac{3E}{2}}$$

2) Une fois l'interrupteur placé en position 2, les branches contenant des générateurs sont déconnectées et on a un simple dipôle LC . Il s'agit donc du cas du cours sans générateur.

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{u_C}{LC} = 0$$

On pose : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. La solution de l'ED est de la forme :

$$u_C(t) = A\,\cos(\omega_0 t) + B\,\sin(\omega_0 t)$$

Les conditions initiales sont (continuité de i et u_C) :

$$u_C(0^+) = \boxed{\frac{3E}{2} = A}$$

$$i(0^+) = -\frac{E}{2R} = C\,\frac{du_C}{dt}(0^+) \quad\Rightarrow\quad \frac{du_C}{dt}(0^+) = -\frac{E}{2RC} = B\omega_0$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{B = -\frac{E}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

3) Par définition (démontré dans le cours) :

$$\boxed{U_m = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{E}{2}\sqrt{9 + \frac{L}{R^2C}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tan(\phi) = -\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{L/C}}{3R}}$$

Exercice n°4 • Circuit R(L||C) ★★☆

1) Loi des mailles : $E = u_R + u$.
Loi des nœuds : $i_R = i_L + i_C$. On dérive cette expression :

$$\frac{di_R}{dt} = \frac{di_L}{dt} + \frac{di_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{u}_R}{R} = \frac{u}{L} + C\,\ddot{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{-\dot{u}}{R} = \frac{u}{L} + C\,\ddot{u}$$

On met l'ED sous forme canonique :

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{\dot{u}}{RC} + \frac{u}{LC} = 0}$$

On identifie :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

La tension aux bornes d'un condensateur est continue, donc u est continue : $u(0^-) = \boxed{u(0^+) = 0}$. L'intensité à travers une bobine est continue : $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$.
La loi des mailles donne :

$$u_R(0^+) = E \quad \Rightarrow \quad i_R(0^+) = i_C(0^+) = \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{u}(0^+) = \frac{E}{RC}}$$

On pose :

$$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$$

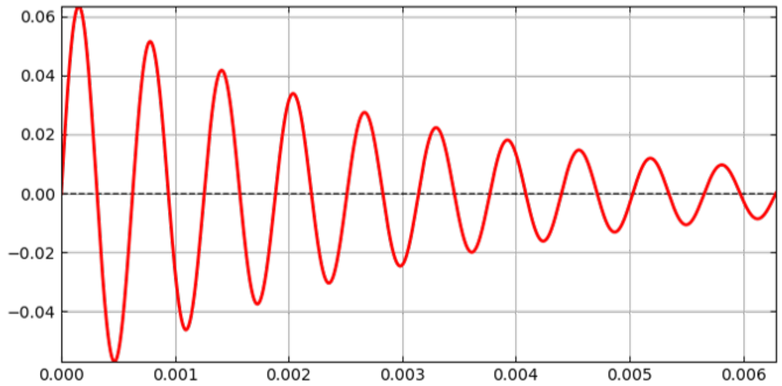
On a donc :

$$\begin{aligned} & u(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) & & \\ & u(0^+) = A = 0 & \Rightarrow \quad & A = 0 \\ & \dot{u}(0^+) = B\Omega = \frac{E}{RC} & \Rightarrow \quad & B = \frac{E}{RC\Omega} \end{aligned}$$

Le solution est ainsi :

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{RC\Omega}\,e^{-\lambda t}\sin(\Omega t)}$$

2)



3) On a :

$$\boxed{R = Q\sqrt{\frac{L}{C}} = 1,5\ \text{k}\Omega}$$

Exercice n°5 • Circuit d'ordre 1 et 2 ★★☆

1) En $t = 0^-$ on montre facilement que toutes les intensités et tensions sont nulles.
Par continuité :

$$\boxed{i_2(0^+) = 0} \quad \text{et} \quad u_C(0^+) = 0$$

Loi des mailles dans la maille comprenant le générateur et le condensateur :

$$E = u_C + u_R = u_C + Ri_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1(0^+) = \frac{E}{R}}$$

En $t \to \infty$, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert et la bobine comme un fil, donc :

$$\boxed{i_1(\infty) = 0} \quad \text{et} \quad u_L(\infty) = 0$$

Loi des mailles dans la maille comprenant le générateur et la bobine :

$$E = u_L + u_r = u_L + ri_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_2(\infty) = \frac{E}{r}}$$

2) Loi des mailles dans la maille comprenant le générateur et le condensateur :

$$E = u_C + u_R = u_C + Ri_1$$

On dérive cette expression :

$$0 = \frac{du_C}{dt} + R\,\frac{di_1}{dt} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{i_1}{C} + R\,\frac{di_1}{dt}$$

On en déduit l'équation différentielle sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_1} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tau_1 = RC}$$

La solution générale est :

$$i_1(t) = A\,e^{-t/\tau_1}$$

Or, avec les conditions initiales :

$$i_1(0^+) = A = \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1(t) = \frac{E}{R}\,e^{-t/\tau_1}}$$

Loi des mailles dans la maille comprenant le générateur et la bobine :

$$E = u_L + u_r = L\,\frac{di_2}{dt} + ri_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{\tau_2} = \frac{E}{L} \quad \text{avec :} \quad \tau_2 = \frac{L}{r}}$$

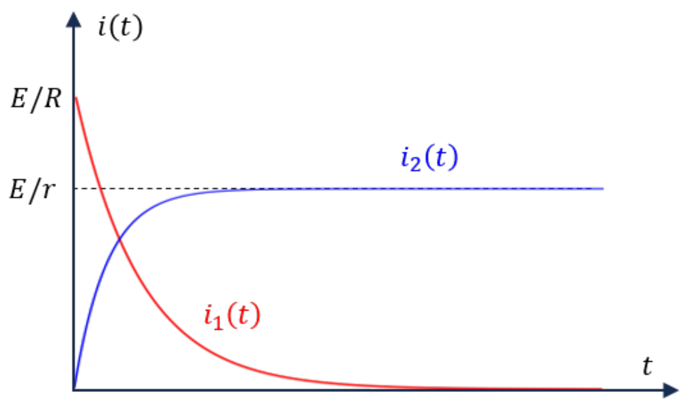
La solution générale est :

$$i_2(t) = B\,e^{-t/\tau_2} + \frac{E}{r}$$

Or, avec les conditions initiales :

$$i_2(0^+) = 0 = B + \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_2(t) = \frac{E}{r}\left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)}$$

On obtient les graphes :



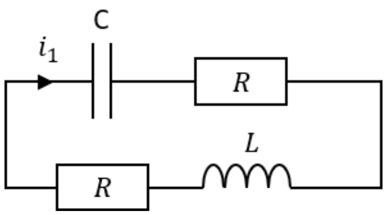
3) Avec une loi des nœuds :

$$\boxed{i_0(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{E}{R}\,e^{-t/\tau_1} + \frac{E}{r}\left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)}$$

Avec le relations $R = r$ et $RC = L/R$, on a en particulier $\tau_1 = \tau_2$ que l'on note simplement $\boxed{\tau = 1/RC}$ dans la suite, et on obtient donc :

$$\boxed{i_0(t) = \frac{E}{R}}$$

4) On travaille avec ce nouveau circuit :



Loi des mailles (en orientant tous les dipôles en convention récepteur pour i_1, donc u_r et u_L sont inversés par rapport aux premières questions) :

$$0 = u_C + 2u_R + u_L = u_C + 2Ri_1 + L\,\frac{di_1}{dt}$$

On dérive cette expression :

$$0 = \frac{i_1}{C} + 2R\,\frac{di_1}{dt} + L\,\frac{d^2i_1}{dt^2}$$

Sous forme canonique :

$$\boxed{\frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{di_1}{dt} + \omega_0^2\,i_1 = 0}$$

Avec :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2}}$$

On est en régime critique, la solution générale est donc :

$$i_1(t) = e^{-\omega_0 t}\,(A + Bt) = e^{-t/\tau}\,(A + Bt)$$

Détermination des conditions initiales :

$$i_2(0^-) = \frac{E}{r} = i_2(0^+) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_1(0^+) = -\frac{E}{r} = -\frac{E}{R}}$$

et,

$$u_C(0^-) = E = u_C(0^+)$$

donc une loi des mailles donne :

$$u_L = L\,\frac{di_1}{dt} = -u_C - 2u_R = -u_C - 2Ri_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{di_1}{dt}(0^+) = \frac{E}{L} = \frac{E}{R^2C}}$$

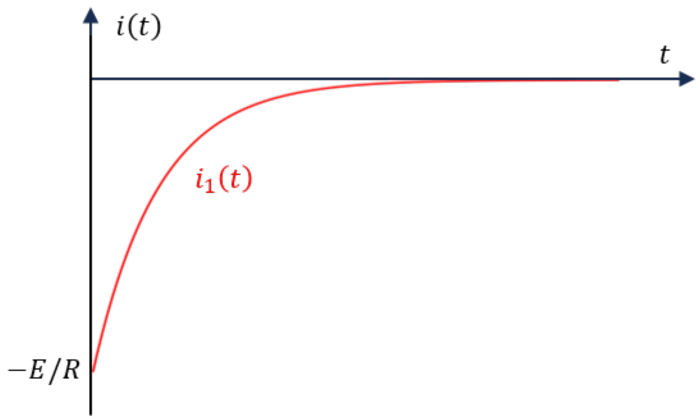
On en déduit :

$$\begin{cases} i_1(0^+) = -\dfrac{E}{R} = A \\ \dfrac{di_1}{dt}(0^+) = \dfrac{E}{L} = -\omega_0 A + B \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{E}{R^2C} - \dfrac{E}{R^2C} = 0 \end{cases}$$

Finalement,

$$\boxed{i_1(t) = -\frac{E}{R}\,e^{-t/\tau}}$$

Graphe :



5) Toute l'énergie initialement stockée par la bobine et le condensateur sera perdue par effet Joule :

$$\mathcal{E}_R = \frac{1}{2}Li_1^2(0) + \frac{1}{2}Cu_C^2(0) = \frac{1}{2}L\frac{E^2}{R^2} + \frac{1}{2}CE^2 = \boxed{CE^2}$$

On peut retrouver ce résultat en prenant l'intégrale de la puissance reçue par les résistances :

$$\mathcal{E}_R = \int_0^\infty 2R\,i_1^2\,dt = \frac{2E^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC}\,dt = \frac{2E^2}{R}\left[\frac{e^{-2t/RC}}{-2/RC}\right]_0^\infty = \boxed{CE^2}$$

Exercice n°6 • Circuit L(R||C) ★★☆

1) Loi des mailles : $E = u_L + u$.

Loi des nœuds : $i_L = i_R + i_C$. On dérive cette expression :

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_L}{L} = \frac{\dot{u}}{R} + C\,\ddot{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{E-u}{L} = \frac{\dot{u}}{R} + C\,\ddot{u}$$

On met l'ED sous forme canonique :

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{\dot{u}}{RC} + \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}}$$

On identifie :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 0,1 < 1/2}$$

On pose :

$$\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$$

2) La tension aux bornes d'un condensateur est continue, donc u est continue : $u(0^-) = \boxed{u(0^+) = 0}$. Ceci implique que $i_R(0^+) = 0$ d'après la loi d'Ohm.

L'intensité à travers une bobine est continue : $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$. Ainsi,

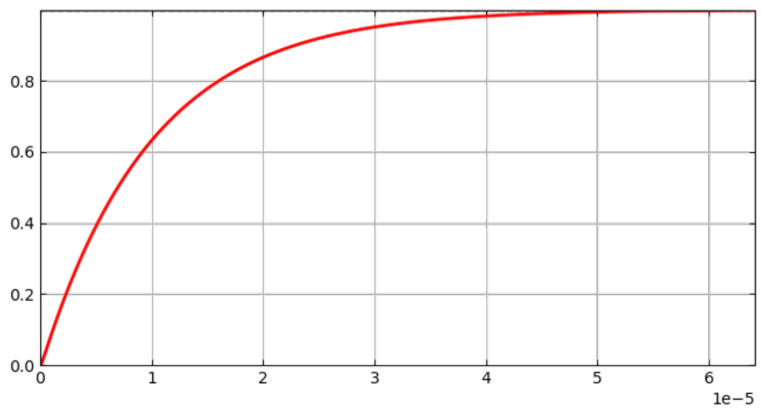
$$i_L = i_R + i_C \quad \Rightarrow \quad i_C(0^+) = \boxed{0 = C\,\dot{u}(0^+)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} &u(t) = e^{-\lambda t}\left(A\,\text{ch}(\Omega t) + B\,\text{sh}(\Omega t)\right) + E \\ &u(0^+) = A + E = 0 && \Rightarrow \quad A = -E \\ &\dot{u}(0^+) = B\Omega - \lambda A = 0 && \Rightarrow \quad B = \frac{\lambda A}{\Omega} = -\frac{\lambda E}{\Omega} \end{aligned}$$

La solution est ainsi :

$$\boxed{u(t) = E\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\text{ch}(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\text{sh}(\Omega t)\right)\right]}$$



3) On est dans un régime pseudo-périodique si $Q > 1/2$. Ainsi :

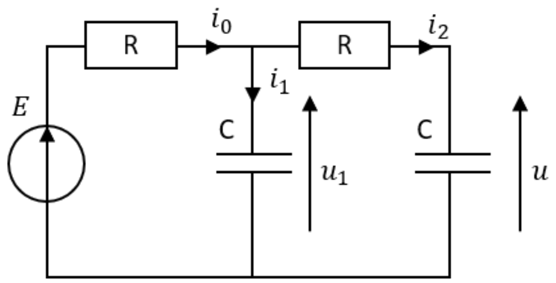
$$R > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} = 500\ \Omega$$

Exercice n°7 • Circuit avec deux condensateurs ★★★

1) Les deux condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. Donc $i(+\infty) = 0$ (pour les deux condensateurs), donc $u_R(+\infty) = 0$ (pour les deux résistances). La loi des mailles donne donc :

$$\boxed{u(+\infty) = u_\infty = E}$$

2) On utilise les notations du montage ci-dessous.



Listons toutes les relations connues :

- Loi des mailles (gauche) : $E = Ri_0 + u_1$
- Loi des mailles (droite) : $u_1 = Ri_2 + u$
- Loi des nœuds : $i_0 = i_1 + i_2$
- Condensateurs : $i_1 = C\dot{u}_1$ et $i_2 = C\dot{u}$

Partons de la combinaison des deux lois des mailles :

$$\begin{aligned} E &= Ri_0 + Ri_2 + u \\ &= R(i_1 + i_2) + Ri_2 + u & \leftarrow \quad & i_0 = i_1 + i_2 \\ &= RC(\dot{u}_1 + 2\dot{u}) + u & \leftarrow \quad & i_1 = C\dot{u}_1 \text{ et } i_2 = C\dot{u} \\ &= RC\left(R\frac{di_2}{dt} + 3\dot{u}\right) + u & \leftarrow \quad & u_1 = Ri_2 + u \\ &= RC(RC\ddot{u} + 3\dot{u}) + u & \leftarrow \quad & i_2 = C\dot{u} \end{aligned}$$

On obtient bien la forme demandée après division par $(RC)^2$.

3) On identifie :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\tau}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}}$$

4) À $t = 0$, u et u_1 sont continus. On en déduit : $\boxed{u(0^+) = u_1(0^+) = 0}$.

De plus,

$$u_1 = Ri_2 + u \quad \Rightarrow \quad i_2(0^+) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{u}(0^+) = 0}$$

5) On pose :

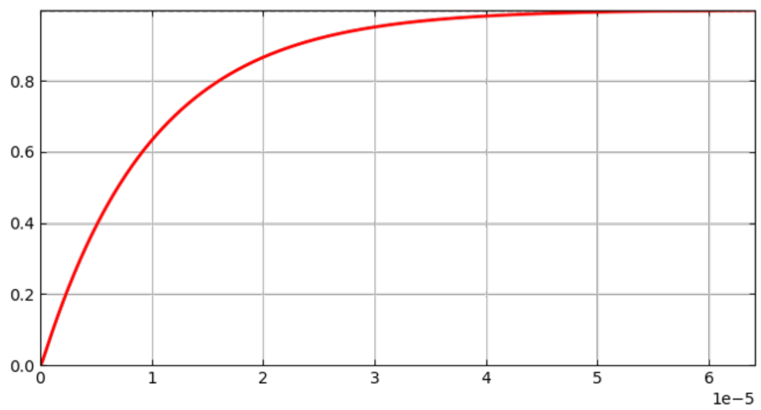
$$\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & u(t) = e^{-\lambda t}\left(A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t)\right) + E \\ & u(0^+) = A + E = 0 & \Rightarrow \quad & A = -E \\ & \dot{u}(0^+) = B\Omega - \lambda A = 0 & \Rightarrow \quad & B = \frac{\lambda A}{\Omega} = -\frac{\lambda E}{\Omega} \end{aligned}$$

La solution est ainsi :

$$\boxed{u(t) = E\left[1 - e^{-\lambda t}\left(\mathrm{ch}(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\mathrm{sh}(\Omega t)\right)\right]}$$


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
1
2
3
4
5
6
1e−5